Free topological groupsの最近の結果について(一般・幾何学的位相と関連する諸問題)

山田, 耕三

数理解析研究所講究録
第 823 巻 1993 年 1-9

Free topological groups の最近の結果について

大阪教育大学　山田 耕三　(Kohzo Yamada)

1 はじめに

空間はすべて Tychonoff space とする。まず、Markov [**M**] による free (abelian) topological groups の定義を与える。

定義 1 (A. A. Markov) 位相空間 X から生成された自由群 $F(X)$ に次の性質を持つ group topology $\mathcal{T}$ が与えられたとき、$((F(X),\mathcal{T})$（以後単に $F(X)$ と書く）を X 上の自由位相群 (**Free topological group on X**) と呼ぶ。

(1) $F(X)$ は X を部分空間として含む。

(2) X から任意の位相群への連続写像の $F(X)$ 上への自然な拡張である準同型写像は、連続となる。

X 上の自由可換位相群 (**Free abelian topological group**) $A(X)$ も同様に定義される。

Free (abelian) topological groups に関する研究の諸結果は Arhangel'skiĭ [**A**] に詳しくのべられているが、今回の講演ではその論文以後に進展のあった最近の話題のうち次の３つについて紹介する。

(1) Inductive limit について
(2) Sequential condition について
(3) Sipačeva の結果について

ここで、本論で頻繁に使われる記号を紹介する。

記号　任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して

$F_n(X) = \{g \in F(X) :\ g$ の $F(X)$ における既約表現の長さが n 以下 $\}$,
$A_n(X) = \{g \in A(X) :\ g$ の $A(X)$ における既約表現の長さが n 以下 $\}$,
$i_n : (X \oplus X^{-1} \oplus \{e\})^n \longrightarrow F_n(X)$: a mapping s.t. $i_n((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = x_1 x_2 \cdots x_n$
($A_n(X)$ のときも同様)

とする。

2 Inductive limit について

定義 2 空間 X と *countable cover* $\{X_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ *of* X において X が **inductive limit** *of* $\{X_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ とは、任意の X の部分集合 U に対して次が成り立つことである。

$$U: \ \textit{open in } X \iff U \cap X_n: \ \textit{open in } X_n \ \textit{for} \ \forall n \in \boldsymbol{N}$$

またこのとき $X = \varinjlim\{X_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ と書く。

Free topological groups $F(X)$ の位相的構造はとても複雑になっているが、もし $F(X) = \varinjlim\{F_n(X) : n \in \boldsymbol{N}\}$ となっていると、各 $F_n(X)$ の位相的構造は product space $(X \oplus X^{-1})^n$ から情報を得られるので、その位相的構造は比較的分かりやすくなる。そこで、いつ $F(X) = \varinjlim\{F_n(X) : n \in \boldsymbol{N}\}$ となるかは、重要な問題となるが、この問題に関する最初の結果は、Graev によって得られた。

定理 1 ([G]) 空間 X が *compact* ならば、$F(X) = \varinjlim\{F_n(X) : n \in \boldsymbol{N}\}$ となる。

その後、この結果は Mack, Morris and Ordman そして Tkačenko によってそれぞれ次のように拡張された。

定理 2 ([MMO]) 空間 X が k_ω*-space* ならば、$F(X) = \varinjlim\{F_n(X) : n \in \boldsymbol{N}\}$ となる。但し、X が k_ω*-space* とは $X = \varinjlim\{X_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ となる *family* $\{X_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ *of compact subset of* X が存在することをいう。

定理 3 ([T1]) 空間 X において、任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して X^n が *normal* 且つ *countably compact* ならば、$F(X) = \varinjlim\{F_n(X) : n \in \boldsymbol{N}\}$ となる。

また、次のことは、簡単に証明できる。

命題 4 空間 X が P*-space* ならば、$F(X) = \varinjlim\{F_n(X) : n \in \boldsymbol{N}\}$ となる。但し、X が P*-space* とは、任意の G_δ *set* が *open set* になることをいう。

証明 $\mathcal{T} = \{U : U \text{ is a } G_\delta \text{ set of } F(X)\}$ とおくと、$\mathcal{T}$ は $F(X)$ 上の 1 つの group topology となるが、いま X が P-space より $\mathcal{T}|X$ は X の本来の topology と一致する。よって、このことは、$\mathcal{T}$ が $F(X)$ の free topology より弱いことを表している。つまり、$F(X)$ は P-space となる。

一方、各 $F_n(X)$ は closed in $F(X)$ より $F(X) = \varinjlim\{F_n(X) : n \in \boldsymbol{N}\}$ となることがわかる。 □

さて、上記のような $F(X) = \varinjlim\{F_n(X) : n \in \boldsymbol{N}\}$ となる、空間 X の十分条件はいくつかわかっていたが、最近 Tkačenko が、次のような pseudocompact space における同値条件を得た。

定理 5 ([T2]) *Pseudocompact space* X において $F(X)=\varinjlim\{F_n(X):n\in\boldsymbol{N}\}$ となる必要十分条件は、任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して X^n が *normal* 且つ *countably compact* となることである。

注意　上記の定理が、$A(X)$ についても成立するかどうかは分かっていない。(十分条件の方が成立することは分かっている。)

さらに、Tkačenko は上記の必要十分条件を得る過程で、次のような興味ある結果を得ている。

定理 6 ([T2]) (1) X^n *: pseudocompact* $\Longleftrightarrow \beta(F_n(X))$ *is homeomorphic to* $F_n(\beta X)$.

(2) X^n *: pseudocompact* $\Longrightarrow i_n$ *: z-closed (i.e. zero-set* の i_n による *image* が *closed).*

(3) X^n *: normal* 且つ *countably compact* $\Longrightarrow i_n$ *: closed.*

(4) X^n *: normal* 且つ *countably compact for* $\forall n\in\boldsymbol{N}\Longrightarrow F(X)$ *: normal.*

(5) X *: pseudocompact* $\Longrightarrow \nu(F(X))$ *is topologically isomorphic to* $F(\beta X)$. 但し、$\nu(F(X))$ は *Hewitt's realcompactification of* $F(X)$ を表す。

(6) X *: pseudocompact* 且つ $\dim X=0\Longrightarrow \dim F(X)=0$.

例 1 ([T2]) $X^*=\omega_1\oplus\omega_1+1$ とおくと、X^* は *normal* 且つ *locally compact*、任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $(X^*)^n$ は *countably compact* となっている。一方、$(X^*)^2$ は *normal* ではない。

よって、Tkačenko の結果より、$F(X^*)\neq\varinjlim\{F_n(X^*):n\in\boldsymbol{N}\}$ となることがわかる。ところが、$F(\omega_1)=\varinjlim\{F_n(\omega_1):n\in\boldsymbol{N}\}$ であり $F(\omega_1+1)=\varinjlim\{F_n(\omega_1+1):n\in\boldsymbol{N}\}$ である。このことは、$F(X)=\varinjlim\{F_n(X):n\in\boldsymbol{N}\}$ となる性質は、基となる空間の *topological sum* についてさえ、閉じていないことを表している。

さらにこの空間 $X^*=\omega_1\oplus\omega_1+1$ は、任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $F_n(X^*)$ が *k-space* となることがわかる。また、一般に $F(X)$ の任意の *compact set* はある $F_n(X)$ に含まれるので、上記の事実より $F(X^*)$ は *k-space* とはならないこともわかる。

注意　任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $\mathcal{T}_n$ を topology for $F_n(X)$ s.t. $i_n:(X\oplus X^{-1}\oplus\{e\})^n\longrightarrow F_n(X)$: quotient とすると定理 5 と 6 より、次のことが分かる。

Pseudocompact space X において $F(X)=\varinjlim\{(F_n(X),\mathcal{T}_n):n\in\boldsymbol{N}\}$ となる必要十分条件は、任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して X^n が *normal* 且つ *countably compact* となることである。

この事実は、各 X^n が normal 且つ countably compact となる空間 X においては、$F(X)$ の topology は各 $(X\oplus X^{-1}\oplus\{e\})^n$ の topology つまり、X^n の topology によって決定されることを示している。

以上は compact spaces を含む class においての結果であったが、次に metrizable spaces における結果を紹介する。

例 2 ([**Y1**]) X を *hedghog space of spininess* $\kappa(\kappa \geq \aleph_0)$ とおくと、任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $A_n(X)$ は *k-space* だが $A(X)$ は *k-space* とはならない。

つまりこのことより、$A(X) \neq \varinjlim\{A_n(X) : n \in \boldsymbol{N}\}$ となっている。

実際次の結果が得られた。

定理 7 ([**Y2**]) *Paracompact space* X において、

(1) $F(X)$ *: k-space* $\iff X^n$ *: k-space for* $\forall n \in \boldsymbol{N}$ *and* $F(X) = \varinjlim\{(F_n(X), \mathcal{T}_n) : n \in \boldsymbol{N}\}$,

(2) $A(X)$ *: k-space* $\iff X^n$ *: k-space for* $\forall n \in \boldsymbol{N}$ *and* $A(X) = \varinjlim\{(A_n(X), \mathcal{T}_n) : n \in \boldsymbol{N}\}$.

今、$\mathcal{T}_w$ を topology for $F(X)$ s.t. $(F(X), \mathcal{T}_w) = \varinjlim\{(F_n(X), \mathcal{T}_n) : n \in \boldsymbol{N}\}$ とする。$A(X)$ に対しても同様にして定義し、同じ記号 $\mathcal{T}_w$ を使うことにする。このとき、一般に $\mathcal{T}_w$ は group topology とはならない。実際、Arhangel'skiĭ, Okunev, Pestov [**AOP**] の結果を拡張して次のような結果が得られた。

定理 8 ([**Y2**]) *Metrizable space* X において次は同値

(1) $F(X)$ *: k-space,*

(2) $F(X)$ *:* k_ω*-space or discrete,*

(3) $\mathcal{T}_w$ *: group topology for* $F(X)$*,*

(4) $F(X) = (F(X), \mathcal{T}_w)$*,*

(5) X *: locally compact separable or discrete.*

定理 9 ([**Y2**]) *Metrizable space* X において次は同値

(1) $A(X)$ *: k-space,*

(2) $\mathcal{T}_w$ *: group topology for* $A(X)$*,*

(3) $A(X) = (A(X), \mathcal{T}_w)$*,*

(4) X *: locally compact and the set of all nonisolated of* X *is separable.*

3 Sequential condition について

まず、次の Ordman and Thomas の結果を紹介する。

定理 10 ([**OT**]) 空間 X が *nontrivial convergent sequence* を含むとすると、$F(X)$ は S_ω を *closed set* として含む。但し、S_ω は *Arhangel'skiĭand Franklin's space* を表す。

さて、この結果が得られている同じ論文で彼らは、次のような疑問を提示している。

疑問 1 $F(X)$ が *nontrivial convergent sequence* を含むとき、$F(X)$ は S_ω を *closed set* として含むか ?

疑問 2 $F(X)$ が *nontrivial convergent sequence* を含むとき、X もまた *nontrivial convergent sequence* を含むか ?

疑問 2 が成立すれば疑問 1 も成立することは定理 10 より分かる。この節では、この疑問に対する結果を紹介する。

まず疑問 2 については、Tkačuk が次の結果を示した。

定理 11 ([Tk]) X を *compact space* で $|X| = \tau \geq \aleph_0$ とすると $F(A_X)$: *topologically isomorphic to* $F(X \oplus \alpha D_\tau)$. 但し、$A_X$ は *Alexandrov duplicate* を αD_τ は *one-point compactification of a discrete space* D_τ *s.t.* $|D_\tau| = \tau$. を表す。

例 3 ([Tk]) X を *infinite compact space* とすると、$F(A_X)$ は *one-point compactification of a discrete space* D *s.t.* $|D| \leq |X|$ を含む。特に、X を *convergent sequence* を含まない空間とすると (例えば、$X = \beta\omega$) 、A_X は疑問 2 の否定的な例となる。

さらに次のような、$F(X)$ $(A(X))$ が nontrivial convergent sequence を含むことの同値条件が Eda, Ohta and Yamada によって得られた。

定理 12 ([EOY]) 空間 X において次は同値

(1) $F(X)$ は *nontrivial convergent sequence* を含む。

(2) $A(X)$ は *nontrivial convergent sequence* を含む。

(3) X に 次の条件を満たす *convergent sequences* $\{x_i : i \in \boldsymbol{N}\}$, $\{y_i : i \in \boldsymbol{N}\}$ が存在する。

(a) $x_i \neq y_i$ *for* $\forall i \in \boldsymbol{N}$,

(b) $|f(x_i) - f(y_i)| \longrightarrow 0$ *as* $i \longrightarrow \infty$ *for* $\forall f \in C(X)$.

さて、convergent sequence とその limit point は、可算の discrete space の one-point compactification と考えられるが、一般に one-point compactification of a discrete space については、次の結果が得られた。

定理 13 ([EOY]) D を *discrete space of infinite cardinality* κ とする。このとき、空間 X において次は同値

(1) $F_2(X)$ は D を含み、$D \cup \{e\}$ は *one-point compactification of* D となっている、

(2) $A_2(X)$ は D を含み、$D \cup \{0\}$ は *one-point compactification of* D となっている、

(3) X に次の条件を満たす部分集合 $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ が存在する、

(a) $x_\alpha \neq y_\alpha$ *for* $\forall \alpha < \kappa$,

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ と *continuous pseudometric* d *on* X に対して、$d(x_\alpha, y_\alpha) < \varepsilon$ *for all but finitely many* α.

(4) X に次の条件を満たす部分集合 $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ が存在する、

(a) $x_\alpha \neq y_\alpha$ *for* $\forall \alpha < \kappa$,

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ と $f \in C(X)$ に対して、$|f(x_\alpha) - f(y_\alpha)| < \varepsilon$ *for all but finitely many* α.

この同値条件を利用すると例 3 は直ちに証明できる。また、この結果より、例 3 とは別の、疑問 2 に対する否定的な例が得られた。

例 4 ([EOY]) D を *infinite discrete space* とし、X を $\beta D \times \{0,1\}$ から、任意の $p \in \beta D \setminus D$ に対して $(p,0)$ と $(p,1)$ を同一視することによって得られた *quotient space* とする。すると、明らかに X は、*one-point compactification of* D は含まないが、X は定理 13 の (4) を満たすことが分かる。

さて、一方疑問 1 については次の結果が Morris and Thompson によって示された。

定理 14 ([MT]) 空間 X において $F(X)$ に *nontrivial convergent sequence* $\{y_i : i \in \boldsymbol{N}\}$ が含まれているとし、$Y = \{y_i : i \in \boldsymbol{N}\} \cup \{y_0\}$ とおく。但し y_0 は *limit point of* $\{y_i : i \in \boldsymbol{N}\}$ とする。このとき、Y によって生成される $F(X)$ の *subgroup* $< Y >$ (*topology* は *subspace topology*) は $F(Y)$ と *topologically isomorphic* である。

この結果と定理 10 より、疑問 1 が正しいことは直ちに分かる。

4 Sipačeva の結果について

Free topological groups に関する古くからの問題が、最近 Sipačeva によっていくつか解かれた。ここでは、それらを紹介する。

そこでまず、問題を次ぎに挙げる。

疑問 3 空間 X とその部分空間 Y において、$F(Y)$ と $< Y >$ が *topologically isomorphic* になるための条件はなにか ? 但し、$< Y >$ は Y によって生成される $F(X)$ の部分群で位相は部分空間の位相が入っているものとする。

疑問 4 空間 X が *Dieudonné complete* であることと $F(X)$ $(A(X))$ が *Weil complete* であることとは、同値となるか ? 但し、$F(X)$ $(A(X))$ が *Weil complete* とは、群の演算による *two sided uniformity* (*i.e. left and right uniformity*) が *complete* になるときをいう。

疑問 5 空間 X が *stratifiable* (特に、*metrizable*) ならば $F(X)$ $(A(X))$ も *stratifiable* になるか ?

まず疑問 3 において、一般には $F(Y)$ と $< Y >$ が topologically isomorphic にはならない例を次に挙げる。

例 5 今 $X = \beta\omega, Y = \omega$ とする。このとき明らかに $F(Y)$ は *discrete space* となる。一方、$p \in X \setminus Y$ を任意にとり、$\mathcal{U}_y$ を y の近傍系とする。そこで、任意の $U \in \mathcal{U}_y$ から、異なる 2 点 $x_U, z_U \in U \cap Y$ をとり $E = \{x_U \cdot z_U^{-1} : U \in \mathcal{U}_y\}$ とおく。すると、$E \subset < Y >$ でしかも $e \in \overline{E}$ となり、このことは $< Y >$ は *discrete space* とはならないことを示している。

この例により、X の compact 性だけでは、疑問 3 において成立する条件とはならない。一方、Uspenskiĭ が次を示した。

定理 15 **([U])** X を *metrizable space* Y をその *closed subset* とする。このとき $F(Y)$ と $< Y >$ は *topologically isomorphic* となる。

そして最近、Sipačeva が、次の結果を出した。

定理 16 **([S1])** 空間 X とその *subset* Y において、$F(Y)$ と $< Y >$ が *topologically isomorphic* となる必要十分条件は、任意の連続で有界な Y 上の *pseudometric* が X 上の連続な *pseudometric* に拡張されることである。

この結果を利用することにより、彼女はさらに次の結果を出した。

定理 17 **([S1])** 空間 X が *Dieudonné complete* であることと $F(X)$ が *Weil complete* であることとは同値である。

定理 18 **([S1])** 空間 X において $\dim X = 0$ ならば $\operatorname{ind} F(X) = 0$ となる。

前者の結果は、疑問 4 の肯定的解答である。後者の結果に関して、同じ仮定のもとで $\dim F(X) = 0$ となるかどうかは、まだ分かっていない (参考 定理 6 (6))。

最後に疑問 5 に関してだが、空間 X が metrizable ならば $F(X)$ $(A(X))$ が F_σ-metrizable, σ-space であり、一方 Lašnev space にはならないことは、以前から知られていた。そこで、この疑問が出されていたのだが、彼女が次の結果を出した。

定理 19 **([S2])** 空間 X が *metrizable* ならば $A(X)$ は *stratifiable space* となる。

しかしながら、$F(X)$ が stratifiable space になるか、または X が stratifiable space のときにも同様に疑問 5 が成立するかどうかは分かっていない。

参考文献

[A] A. V. Arhangel'skiĭ, Algebraic objects generated by topological structure, J. Soviet Math. 45 (1989) 956-978.

[AOP] A. V. Arhangel'skiĭ, O. G. Okunev and V. G. Pestov, Free topological groups over metrizable spaces, Topology Appl. 33 (1989) 63-76.

[EOY] K. Eda, H. Ohta and K. Yamada, Prime subspaces in free topological groups, Submitted.

[G] M. I. Graev, Free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 12(3) (1948) 279-324 (in Russian); English transl.: Amer. Math. Soc. transl. 35 (1951); Reprint: Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 305-364.

[MMO] J. Mack, S. A. Morris and E. T. Ordman, Free topological groups and the projective dimension of locally compact Abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973) 303-308.

[M] A. A. Markov, On free topological groups, Dokl. Akad. Nauk SSSR, N. S. 31 (1941) 299-301.

[MT] S. A. Morris and H. B. Thompson, Metrizability of subgroups of free topological groups, Bull. Austral. Math. Soc. 33 (1986) 103-112.

[OT] E. T. Ordman and B. V. S. Thomas, Sequential conditions and free topological groups, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980) 319-326.

[S1] O. V. Sipačeva, Free topological groups of spaces and their subspaces, Preprint.

[S2] O. V. Sipačeva, A letter.

[T1] M. G. Tkačenko, Strong collective normality and countable compactness in free topological groups, Siberian Math. J. 28 (1987) 824-832.

[T2] M. G. Tkačenko, A letter.

[Tk] V. V. Tkačuk, On a method of constructing example of M-equivalent spaces, Russian Math. Surveys 38 (1983) 135-136.

[U] V. V. Uspenskiĭ, On subgroups of free topological groups, Soviet Math. Dokl. 32 (1985) 847-849.

[Y1] K. Yamada, Characterizations of a metrizable space such that every $A_n(X)$ is a k-space, Topology Appl. (to appear).

[Y2] K. Yamada, Remark on a topology of free topological groups, Preprint.